Pavel Obdržálek, MAII, úkol č. 5

$$\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx \tag{1}$$

Provedeme substituci $u = \ln x$ ($du = \frac{1}{x}dx$, 1.VOS):

$$\int \frac{u}{u+1}du$$

Vydělíme čitatele jmenovatelem a přepíšeme:

$$\int \frac{u}{u+1}du = \int 1 - \frac{1}{u+1}du = \int 1du - \int \frac{1}{u+1}du$$

Toto jsou známé integrály:

$$u - \ln|u+1| + c$$

Resubstituujeme:

$$u - \ln|u+1| + c = \ln|x| - \ln|\ln|x| + 1| + c$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx \tag{2}$$

Usměrníme zlomek:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x})(1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x})}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx$$

Rozdělíme integrál na součet integrálů:

$$\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx\right)$$

Známé integrály vypočítáme:

$$\sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx$$

Provedeme substituci $u = \sqrt{x}$ ($du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, 1.VOS)

$$\sqrt{x} + \frac{x}{2} - \int \sqrt{1-u^2}du$$

Provedeme substituci $u = \sin(v)$ ($du = \cos(v)dv$, 2.VOS):

$$\sqrt{x} + \frac{x}{2} - \int \sqrt{1-u^2}du = \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \int \sqrt{\cos^2(v)}\cos(v)dv = \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \int \cos^2(v)dv$$

To můžeme přepsat jako:

$$\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\int\frac{1}{2}(\cos(2v)+1)dv=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int\cos(2v)-\frac{1}{2}\int 1dv$$

Provedeme substituci $w=2v$ ($dw=2dv$, 1.VOS)

$$\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int\cos(w)dv-\frac{1}{2}\int 1dv$$

A zintegrujeme:

$$\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{\sin(w)}{4}-\frac{v}{2}$$

A resubstituujeme:

$$\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{\sin(2v)}{4}-\frac{v}{2}$$

A upravíme:

$$\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{\sin(v)\cos(v)}{2}-\frac{v}{2}=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{\sin(v)\sqrt{1-\sin^2(v)}}{2}-\frac{v}{2}=$$

A resubstituujeme:

$$\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{u\sqrt{1-u^2}}{2}-\frac{\arcsin(u)}{2}=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{2}-\frac{\arcsin(\sqrt{x})}{2}$$

$x\in(0,\infty)$

$$\int\frac{\sin^2(x)}{\sin(x)+\cos(x)+2}dx \tag{3}$$

Provedeme substituci $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ a $\sin x=\frac{2t}{1-t^2}$ ($dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, 2.VOS):

$$2\int\frac{t^2(1+t^2)}{(1-t^2)^2\left(\frac{2t}{1-t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)}dt$$

$x\in\mathbb{R}$